Escher in Het Paleis

Wiskundepakket

Ruimtelijke figuren

Ruimtelijke figuren

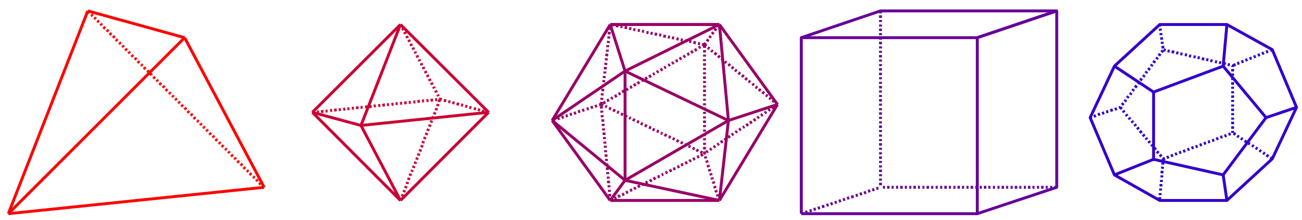
Escher maakt in EEN AANTAL prenten gebruik van wiskundig interessante ruimtelijke vormen, zoals Platonische lichamen en Möbiusbanden. Rond 1937 kwam Escher via zijn broer, die geoloog was, op het spoor van de vele vormen die kristallen kunnen aannemen. Later, werd Escher door beroemde wiskundigen waar hij contact mee had, gewezen op de mogelijkheden die bijvoorbeeld een Möbiusband bood voor zijn kunst.

Een *veelvlak* is in de wiskunde een ruimtelijke vorm waarvan de zijvlakken allemaal (rechte) vlakken zijn. De lijnstukken die deze zijvlakken begrenzen worden *ribben* genoemd. Een kubus of een piramide zijn voorbeelden van veelvlakken.

Een *regelmatig veelvlak* is een veelvlak waarvan alle zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn (dat wil zeggen een veelhoek waarvan alle zijden even lang en alle hoeken even groot zijn) en waarvan in ieder hoekpunt evenveel ribben samenkomen. Een kubus is een regelmatig veelvlak: alle zijvlakken zijn vierkanten en in ieder hoekpunt komen drie ribben samen.

Euclides (rond 200 BC) toonde in zijn boek ‘de elementen’ aan dat er precies vijf verschillende regelmatige veelvlakken zijn. Plato kende de vijf vormen al tweehonderd jaar eerder en zag ze als de meest ideale ruimtelijke vormen. Vandaar dat ze nog steeds *Platonische lichamen* worden genoemd.

Hieronder zie je ze alle vijf.



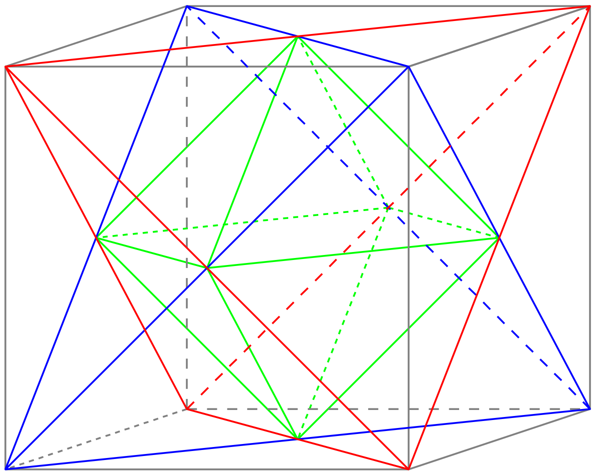
tetraeder ***octaeder*** ***icosaeder*** ***kubus*** ***dodecaeder***

Er zijn veel verbanden tussen deze Platonische lichamen. Als je om en om steeds een van de 8 hoekpunten van een kubus neemt en die door lijnstukken verbindt, krijg je een tetraëder. Hieronder zie je een rode en een blauwe tetraëder binnen een kubus.

De figuren hierboven zijn allemaal zo getekend dat je duidelijk kunt zien hoe je ze uit een kubus kunt halen.

Als je de middelpunten van de zijvlakken van een kubus door de juiste lijnstukken met elkaar verbindt, krijg je een octaëder. Die zie je in het groen.

Als je de rode, blauwe en groene zijden samenneemt dan krijg je een mooie ster, die wel Keplerster genoemd wordt.



In de prent ‘Sterren’ leefde Escher zich helemaal uit in het tekenen van allerlei veelvlakken.

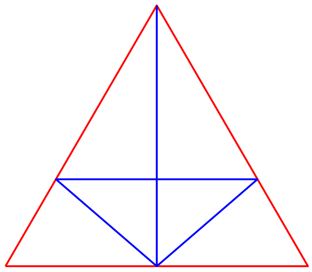
De vijf Platonische veelvlakken en de Keplerster (rechtsboven) vind je er in terug, maar ook vele andere sterren die gebaseerd zijn op Platonische lichamen. Centraal in het figuur is een ster die is opgebouwd uit drie octaëders.

sterren

zwaartekracht

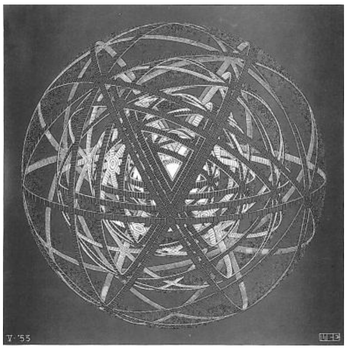
orde en chaos

In de prenten ‘Orde en Chaos’ en ‘Zwaartekracht’ gebruikt Escher een ster die gebaseerd is op de dodecaëder en in de prenten ‘Dubbele Planetoïde’ en ‘Viervlak Planetoïde’ gebruikt Escher tetraëders. Maar ook in de prent ‘Concentrische Schillen’ gebruikt Escher een octaëder als basisvorm. Hierin neemt hij in de driehoekige zijvlakken van de octaëder extra lijnstukken.



De octaëder wordt vanuit het centrum op een bol geprojecteerd, waardoor een patroon van negen cirkels ontstaat die tezamen een ruimtelijk figuur met 26 hoekpunten, 72 ribben en 48 driehoeken vormt. In de prent plaatste Escher vier van deze figuren binnen elkaar. Het moet een heel gepuzzel geweest zijn voor een niet-wiskundige als Escher!

Dat hij een manier gehad moet hebben om de lengten van de (gekromde) ribben uit te rekenen is zeker, de streepjes op de ribben geven deze lengten nog aan. Hij is echter niet consistent in het gebruik van deze lengten en ook beweert hij in een toelichting dat alle driehoeken gelijkvormig zijn, hetgeen (in wiskundige) zin niet waar is. Het is een wonder dat hij toch tot zo een gave prent kon komen!



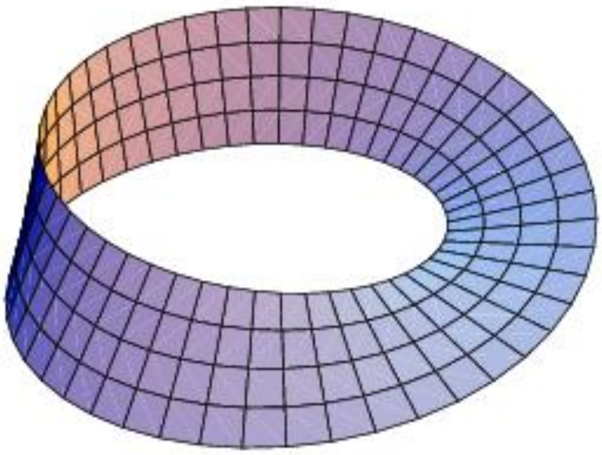
Concentrische schillen

In een aantal prenten experimenteerde Escher met driedimensionale spiralen. Afgezien van de spiralen die Escher op een bol construeerde (zie: rasters) zijn deze prenten vanuit wiskundig oogpunt niet bijzonder interessant.

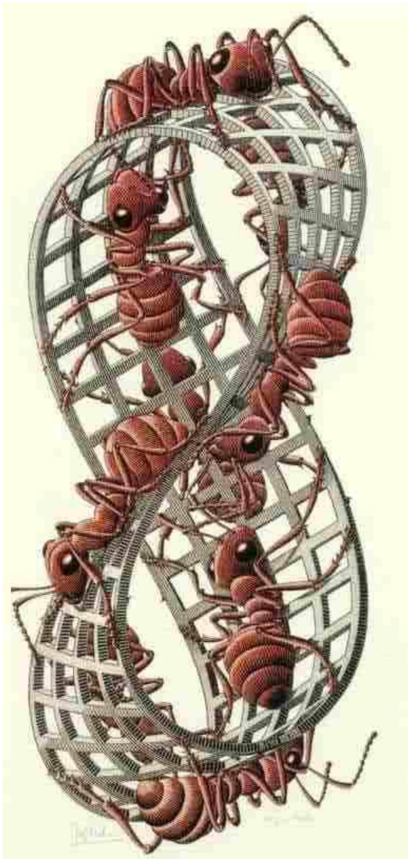
Des te boeiender zijn de twee prenten die Escher vervaardigde met een *Möbius band* als basis. De Möbius band was een favoriet stuk speelgoed van de wiskundigen uit de tweede helft van de negentiende eeuw en speelde een belangrijke rol in de ontwikkeling van het vakgebied dat *topologie* genoemd wordt. Topologie is een onderdeel van de meetkunde, dat zich bezighoudt met de eigenschappen van een vorm die bewaard blijven onder continue vervorming.

Zo kan je van een bol met wat oprekken wel een kubus maken (stel je voor dat de bol van rubber is!), maar geen ring. Blijkbaar hebben bol en kubus bepaalde eigenschappen gemeenschappelijk die een ring niet heeft. Het bijzondere aan een Möbius band is dat de ene kant van de band doorloopt in de andere kant.

De band bestaat weliswaar uit een vlak, maar kan alleen in drie dimensies bestaan. Vanuit elk punt van de figuur zie je ogenschijnlijk twee zijden en twee randen, maar volg je vanuit een punt een rand of een zijde, dan blijkt bij terugkeer dat men ook de ogenschijnlijk andere rand of zijde heeft doorlopen. Het is niet mogelijk om een kant bijvoorbeeld blauw te kleuren en de andere kant rood: er is maar één kant!



In een beroemde prent laat Escher mieren over een Möbius band kruipen. Nadat ze een rondje gekropen hebben zijn ze opeens aan de andere kant van de band gekomen!

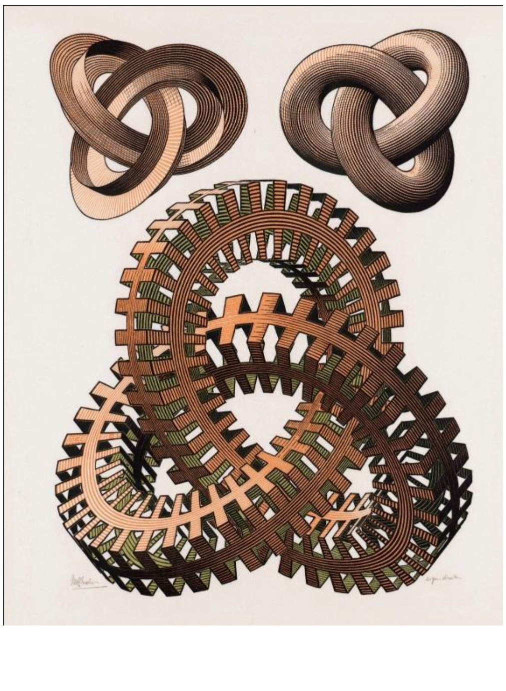


Möbiusband II

Wat er gebeurt wanneer je een Möbius band in de lengterichting in tweeën knipt, is te zien in een andere prent. Er ontstaan niet twee strippen, zoals je zou verwachten, maar één strip. Hiervan kan je voor en achterkant wel een eigen kleur geven!

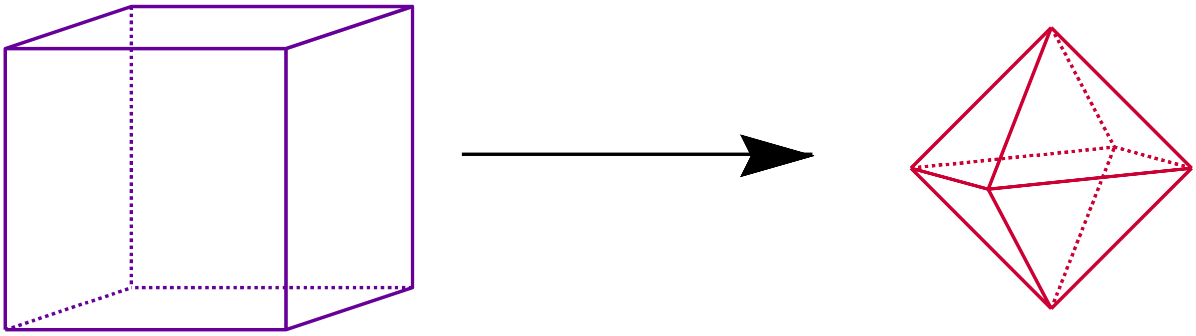
Möbiusband I

Tot het vakgebied van de topologie behoort ook de wiskundige *knopentheorie*. In de prent 'knopen' geeft Escher een zelfde knoop op drie verschillende wijzen weer. Als je een zijvlak van de grootste tekening hiervan volgt, zal je ontdekken dat je de knoop vier keer moet doorlopen voordat je wee op je beginpunt terug komt! Net als bij de Möbius band bestaat deze knoop uit slechts één zijvlak, terwijl het schijnt alsof er vier verschillende zijvlakken zijn.



Opgaven Ruimtelijke figuren

Opgave 1



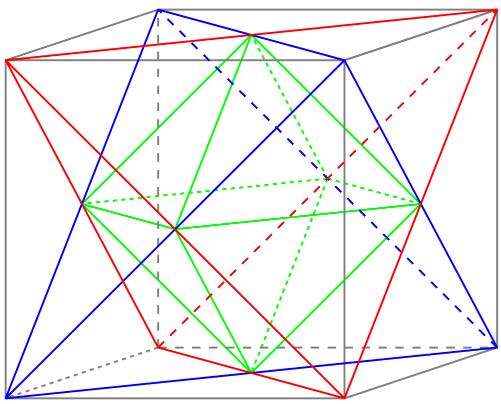
kubus *octaeder*

Door van de hoekpunten van een kubus de hoeken af te zagen, kan je van een kubus een octaëder maken. Je moet dan steeds loodrecht op de zogenaamde lichaamsdiagonalen zagen. Als je maar een klein stukje afzaagt, ontstaan er gelijkzijdige driehoekjes bij de hoekpunten. Door steeds grotere stukken af te zagen ontstaat als het ware een driedimensionale metamorfose, van de kubus naar de octaëder. Teken deze metamorfose als een serie van vijf opeenvolgende ruimtelijke figuren.

Wanneer je dit proces uitvoert op de octaëder krijg je trouwens weer een kubus! Je zaagt dan, in eerste instantie, vierkante plakjes van de hoekpunten van de octaëder af. Als je wilt, kan je deze metamorfose ook weergeven.

Opgave 2

Hiernaast zie je hoe een Kepler ster in een kubus past. De rode, blauwe en groene lijnstukken vormen namelijk een Kepler ster. Escher gebruikte een Kepler ster in zijn prent 'sterren'.

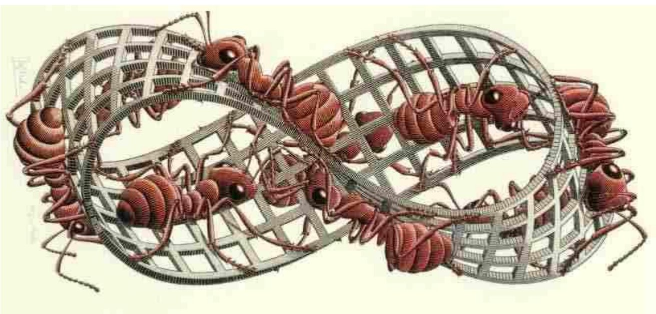


Maak een mooie tekening van een Kepler ster. Laat de ster er echt uit zien, door alleen de vlakdelen te tekenen die je in werkelijkheid ziet, en eventueel gebruik te maken van schaduw.

Opgave 3

Voor deze opgave heb je een schaar, lijm of plakband en papier nodig.

1. Neem een vel A4-papier en knip hiervan een lange strook, waarvan de breedte een kwart van de breedte van het vel is. (Als je eerst vouwt, dan heb je lijnen waarlangs je kunt knippen)
2. Teken op beide zijden van de strook een serie identieke figuren, bijvoorbeeld poppetjes of mieren zoals Escher gebruikt in zijn prent 'möbiusband 2.
3. Plak de twee uiteinden van de strook gedraaid aan elkaar, zodat een Möbius band ontstaat.
4. Controleer of de figuren van een kant doorlopen aan de andere kant van het papier, zoals bij een Möbius band het geval is. Probeer één kant van de strook een andere kleur te geven dan de andere kant.
5. Knip nog zo een strook papier en plak de uiteinden gedraaid op elkaar, zodat weer een Möbius band ontstaat.
6. Knip de strook in lengterichting door over het midden van de strook. Als je het goed doet ontstaat nu weer een soort Möbius band, maar nu met een dubbele slag erin.
7. Kleur één kant van de strook en de andere kant met een andere kleur.
8. Probeer het figuur van 'möbiusband 1' van Escher in papier na te maken.



Möbiusband 2

Möbiusband 1